

§2.5 随机变量的函数

- 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$. (定理5.1. 要求是Borel函数).
随机变量 X 的函数指: 一个新的随机变量

$$Y = f(X) : \omega \mapsto f(X(\omega)).$$

- 目标: 求 Y 的分布列或密度函数.
- 例. 假设 X 的分布列为 $P(X = x_i) = p_i, \forall i$. 则 Y 也是离散型, 将其可能取值记为 $y_j, \forall j$.

$$P(Y = y_j) = \sum_{i: f(x_i)=y_j} p_i.$$

例5.1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 的分布.

- 分布函数法. 第一步, 将 $Y \leq y$ 改写为 $X \leq \mu + \sigma y$. 从而,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq \mu + \sigma y).$$

- 第二步, 代入 X 的密度, 做变量替换:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\mu + \sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt. \end{aligned}$$

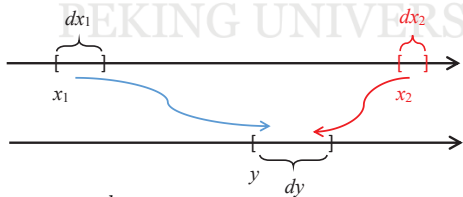
- 第三步, 求导, 得到 $p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$, 即 $Y \sim N(0, 1)$.
- 一般地, $Z := a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$, 其中 $b \neq 0$.

- 一对一情形: 定理5.2. 假设 f 连续可导, $f'(x) > 0, \forall x$, 则

$$p_X(x)dx = p_Y(y)dy \rightarrow p_Y(y) = p_X(x) \frac{1}{f'(x)} = p_X(g(y))g'(y).$$

- 多对一情形*: f 为分段的一对一情形的函数. 例如, f 是多项式函数, 都有

$$p_Y(y) = \sum_{x_i: f(x_i)=y} p_X(x_i) \frac{1}{|f'(x_i)|}.$$



- 若 $X \stackrel{d}{=} \tilde{X}$, 则 $f(X) \stackrel{d}{=} f(\tilde{X})$.

例5.2. 假设 $X \sim N(0, 1)$, $Y = X^2$. 求 Y 的密度函数.

- 方法一、分布函数法: 对任意 $y > 0$,

$$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$
$$\Rightarrow p_Y(y) = p_X(\sqrt{y}) \frac{d\sqrt{y}}{dy} + p_X(-\sqrt{y}) \frac{d(-\sqrt{y})}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}.$$

- 方法二、用多对一公式:

第一步, 确定每个 $y > 0$ 的原像点: $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = -\sqrt{y}$.

- 第二步, 求出每个 x_i 的贡献: $p_X(x_i) \left| \frac{dx_i}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$.

- 第三步, 对 i 求和:

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^2 p_X(x_i) \left| \frac{dx_i}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad \text{其中 } y > 0.$$

- 注: $X^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

反例. 假设 $X \sim N(0, 1)$, $Y = f(X)$, 其中,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } |x| > 1; \\ 1, & \text{若 } |x| \leq 1. \end{cases}$$


- Y 不是连续型:

$$P(Y = 1) = P(|X| \leq 1) > 0.$$

- f 在 $(-1, 1)$ 上恒有 $f'(x) = 0$.

例5.4. 已知 $Y = \ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 X 的分布.

- 称 X 服从对数正态分布.
- $X = e^Y > 0$. 因此, $\forall x > 0$, 有


$$\begin{aligned} G_X(x) &= P(X > x) = P(Y > \ln x) \\ &= \int_{\ln x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{u} du. \end{aligned}$$

- $p_X(x) = -G'_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, x > 0$.

- 定义5.1. 设 F 是分布函数(满足单调、规范、右连续). 令

$$F^{-1}(p) := \inf\{x : F(x) \geq p\}, \quad \forall p \in (0, 1).$$

称 F^{-1} 为 F 的广义反函数.

- 定理5.3. 假设 F 是分布函数.

若 $U \sim U(0, 1)$, 则 $X = F^{-1}(U)$ 满足 $F_X = F$.

- 证明: $F^{-1}(p) \leq x$ 当且仅当 $p \leq F(x)$. 于是,

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

- 例5.3. 假设 F_X 连续, 则

$$Y = F_X(X) \sim U(0, 1).$$

- F_X 不连续时的反例, $X \sim B(1, p)$.

